

Автор Стрельникова Л.В.

ЕГЭ 4 задание Принцип Фано

4 (базовый уровень, время – 2 мин)

Тема: Кодирование и декодирование
информации.

Что проверяется:

Умение кодировать и декодировать информацию.

*1.1.2. Процесс передачи информации, источник и приёмник информации.
Сигнал, кодирование и декодирование. Искажение информации.*

*1.2.2. Умение интерпретировать результаты, получаемые в ходе
моделирования
реальных процессов (?)*

Что нужно знать 1ч

1. кодирование – это перевод информации с одного языка на другой (запись в другой системе символов, в другом алфавите)
2. обычно кодированием называют перевод информации с «человеческого» языка на формальный, например, в двоичный код, а декодированием – обратный переход
3. один символ исходного сообщения может заменяться одним символом нового кода или несколькими символами, а может быть и наоборот – несколько символов исходного сообщения заменяются одним символом в новом коде (китайские иероглифы обозначают целые слова и понятия)
4. кодирование может быть *равномерное* и *неравномерное*;
при равномерном кодировании все символы кодируются кодами равной длины;
при неравномерном кодировании разные символы могут кодироваться кодами разной длины, это затрудняет декодирование

Что нужно знать 2ч

- закодированное сообщение можно однозначно декодировать с начала, если выполняется **условие Фано: никакое кодовое слово не является началом другого кодового слова;**
- закодированное сообщение можно однозначно декодировать с конца, если выполняется **обратное условие Фано: никакое кодовое слово не является окончанием другого кодового слова;**
- выполнение одного из условий Фано достаточно, но не необходимо для однозначного декодирования;
- если в условии задачи утверждается, что код удовлетворяет условию Фано, имеется в виду прямое условие Фано: ни одно кодовое слово не совпадает с началом другого кодового слова; если утверждается, что код допускает однозначное декодирование, то нужно проверять как прямое, так и обратное условия Фано.

Подсчёт битов на кодирование слова

1 тип задач

Р-17 (демо-2021).

Для кодирования некоторой последовательности, состоящей из букв **Л, М, Н, П, Р**, решили использовать неравномерный двоичный код, удовлетворяющий условию, что никакое кодовое слово не является началом другого кодового слова. Это условие обеспечивает возможность однозначной расшифровки закодированных сообщений.

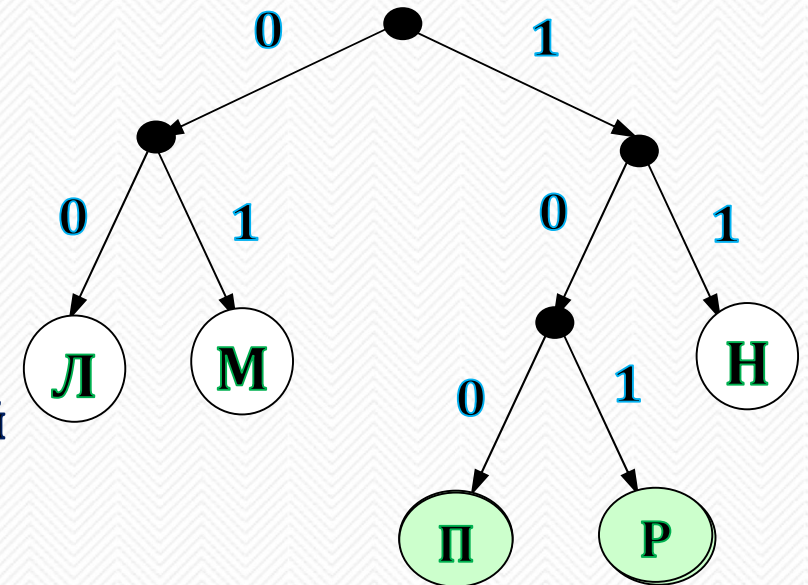
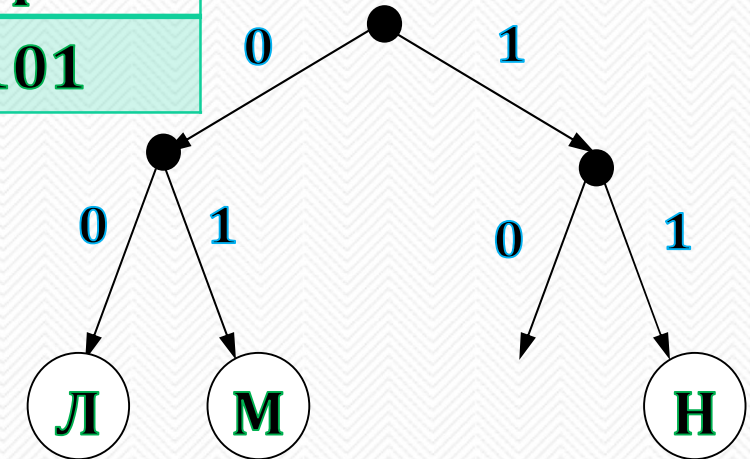
Для букв **Л, М, Н** использовали соответственно кодовые слова **00, 01, 11**. Для двух оставшихся букв – **П, Р** – кодовые слова неизвестны. Укажите кратчайшее возможное кодовое слово для буквы **П**, при котором код будет удовлетворять указанному условию. Если таких кодов несколько, укажите код с наименьшим числовым значением.

Л	М	Н	П	Р
00	01	11		

Л	М	Н	П	Р
00	01	11	100	101

Решение:

- 1) Построим дерево для заданного двоичного кода:
- 2) для того чтобы выполнить условие Фано (ни одно кодовое слово не совпадает с началом другого кодового слова), необходимо, чтобы все буквы размещались в листьях дерева
- 3) у нас осталась единственная свободная ветка 10, на которую нужно «навесить» две буквы; это можно сделать так:
- 4) таким образом, для кода буквы П есть два варианта одной длины: 100 и 101; по условию выбираем вариант с меньшим значением, то есть 100



Ответ: **100**.

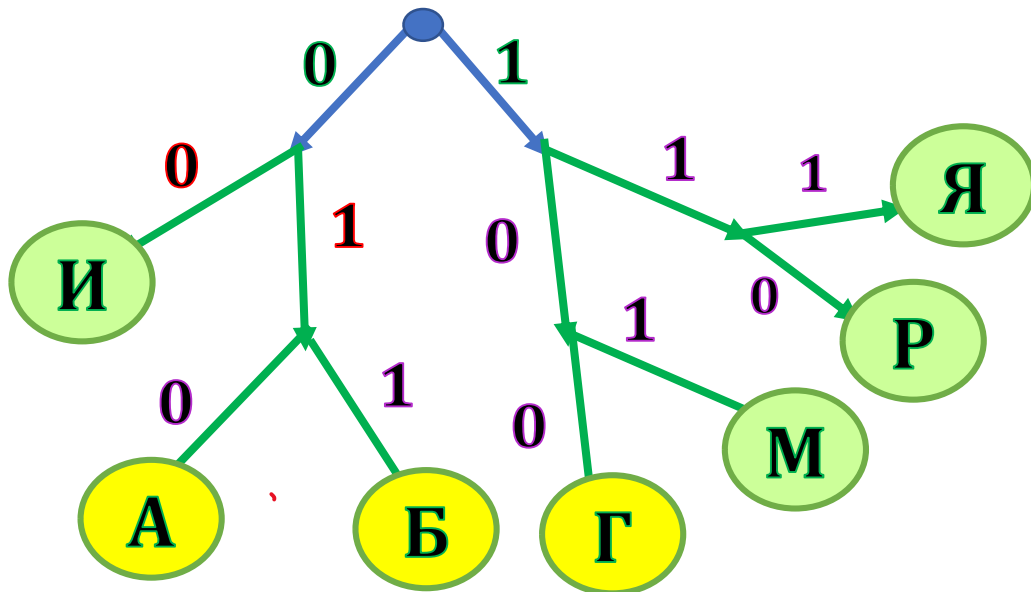


Вариант 1

По каналу связи передаются сообщения, содержащие только семь букв: А, Б, Г, И, М, Р, Я. Для передачи используется двоичный код, удовлетворяющий условию Фано. Кодовые слова для некоторых букв известны: А — 010, Б — 011, Г — 100. Какое **наименьшее** количество двоичных знаков потребуется для кодирования слова МАГИЯ?

Примечание. Условие Фано означает, что ни одно кодовое слово не является началом другого кодового слова.

А	Б	Г	И	М	Р	Я
010	011	100	00	101	110	111



М	А	Г	И	Я
	010	100		
3	3	3	2	3
14				

1

Тип 4 № 15790

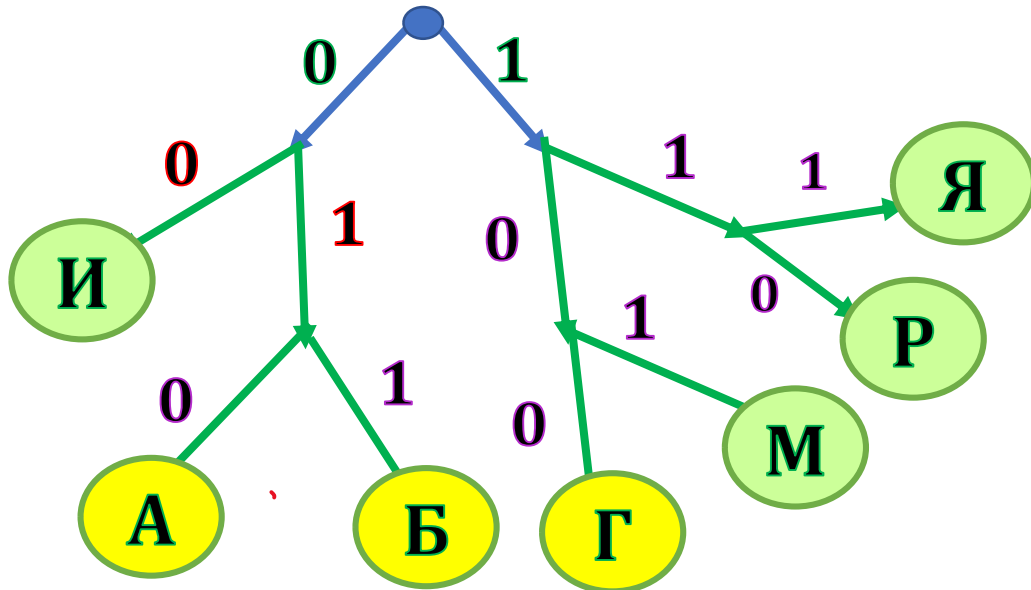


Вариант 1

По каналу связи передаются сообщения, содержащие только семь букв: А, Б, Г, И, М, Р, Я. Для передачи используется двоичный код, удовлетворяющий условию Фано. Кодовые слова для некоторых букв известны: А — 010, Б — 011, Г — 100. Какое **наименьшее** количество двоичных знаков потребуется для кодирования слова МАГИЯ?

Примечание. Условие Фано означает, что ни одно кодовое слово не является началом другого кодового слова.

А	Б	Г	И	М	Р	Я
010	011	100	00	101	110	111

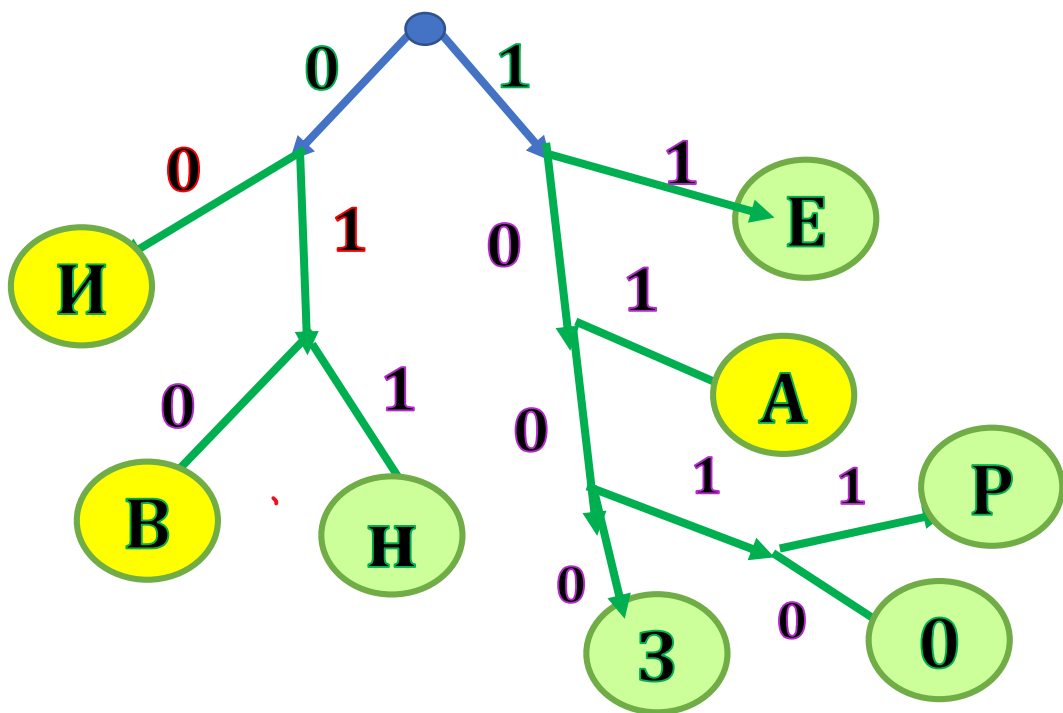


М	А	Г	И	Я
101	010	100	00	111
3	3	3	2	3
14				

По каналу связи передаются сообщения, содержащие только восемь букв: А, В, Е, З, И, Н, О, Р. Для передачи используется двоичный код, удовлетворяющий условию Фано. Кодовые слова для некоторых букв известны: А — 101, В — 010, И — 00. Какое наименьшее количество двоичных знаков потребуется для кодирования слова НЕВЕЗЕНИЕ?

Примечание. Условие Фано означает, что ни одно кодовое слово не является началом другого кодового слова.

А	В	И	З	Е	Н	О	Р
101	010	00	1000	11	011	10010	10011



НЕВЕЗЕНИЕ

$$I = 3 + 2 + 3 + 2 + 4 + 2 + 3 + 2 + 2 = \underline{23}$$

Решение задания №13

- ✓ Буква Е повторяется в слове НЕВЕЗЕНИЕ чаще всего, поэтому закодируем её кодовым словом 11.
- ✓ Буква Н повторяется в слове НЕВЕЗЕНИЕ 2 раза, поэтому закодируем её кодовым словом 100.
- ✓ Букву З закодировать кодовым словом длины 3 нельзя, поскольку не останется кодовых слов для оставшихся букв, которые удовлетворяли бы условию Фано.
- ✓ Поэтому букву З закодируем кодовым словом 0110. Тогда количество двоичных знаков, которые потребуются для кодирования слова НЕВЕЗЕНИЕ, равно $4 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 23$.

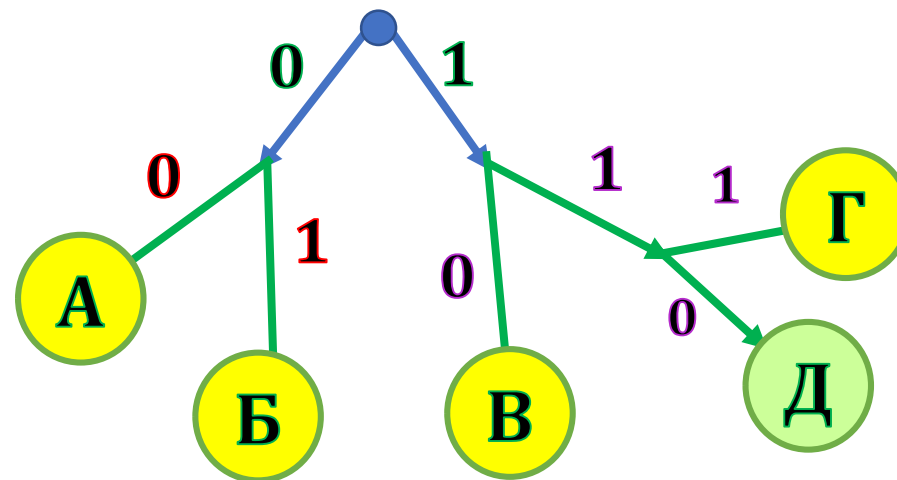
Ответ: 23

5) (СБОРНИК КРЫЛОВА 2023) По каналу связи передаются сообщения, содержащие только пять букв: А, Б, В, Г, Д. Для передачи используется неравномерный двоичный код. Для букв А, Б, В, Г используются кодовые слова 00, 01, 10 и 111 соответственно.

Укажите самое короткое кодовое слово для буквы Д, при котором код не будет удовлетворять условию Фано, при этом в записи самого слова должно использоваться более одного символа, а само слово не должно совпадать ни с одним из используемых слов для кодирования букв А, Б, В и Г. Если таких слов несколько, то укажите слово с минимальным числовым значением.

А	Б	В	Г	Д
00	01	10	111	110

Ответ: 110



Задания ученикам

На 1 тип задач

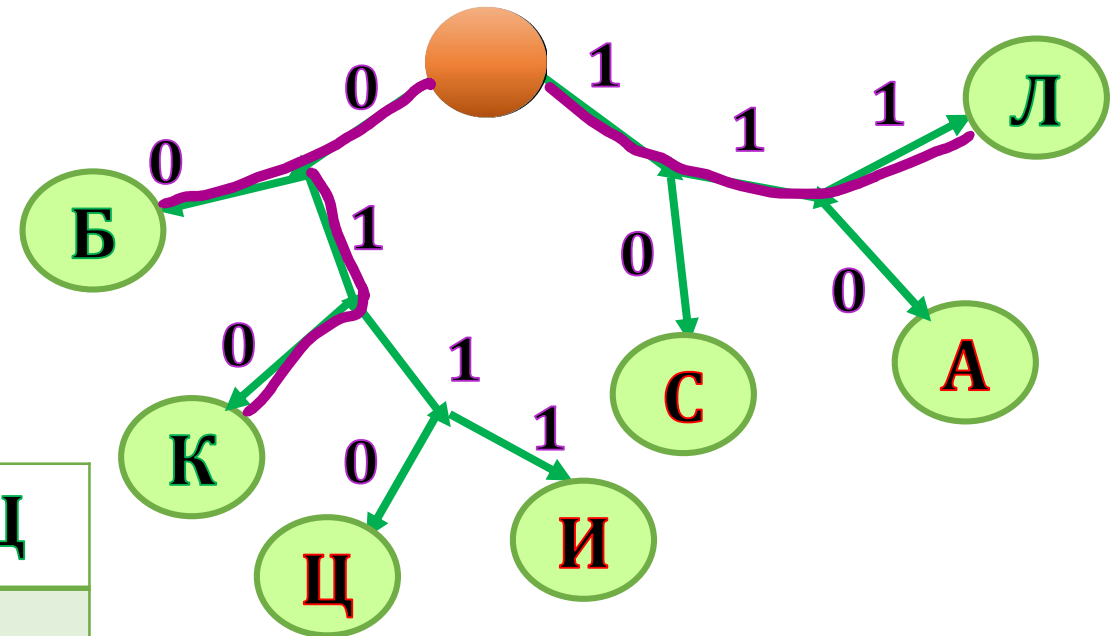
7. По каналу связи передаются сообщения, содержащие только семь букв: А, Б, И, К, Л, С, Ц. Для передачи используется двоичный код, удовлетворяющий условию Фано. Кодовые слова для некоторых букв известны: Б — 00, К — 010, Л — 111. Какое наименьшее количество двоичных знаков потребуется для кодирования слова АБСЦИССА?

10. По каналу связи передаются сообщения, содержащие только семь букв: А, Б, В, Д, О, Р, Т. Для передачи используется двоичный код, удовлетворяющий условию Фано. Кодовые слова для некоторых букв известны: Б — 01, Д — 001, Р — 100. Какое наименьшее количество двоичных знаков потребуется для кодирования слова ВОДОВОРОТ?

13. По каналу связи передаются сообщения, содержащие только восемь букв: А, В, Е, З, И, Н, О, Р. Для передачи используется двоичный код, удовлетворяющий условию Фано. Кодовые слова для некоторых букв известны: А — 101, В — 010, И — 00. Какое наименьшее количество двоичных знаков потребуется для кодирования слова НЕВЕЗЕНИЕ?

7. По каналу связи передаются сообщения, содержащие только семь букв: А, Б, И, К, Л, С, Ц. Для передачи используется двоичный код, удовлетворяющий условию Фано. Кодовые слова для некоторых букв известны: Б — 00, К — 010, Л — 111. Какое наименьшее количество двоичных знаков потребуется для кодирования слова АБСЦИССА?

Решение задания №7

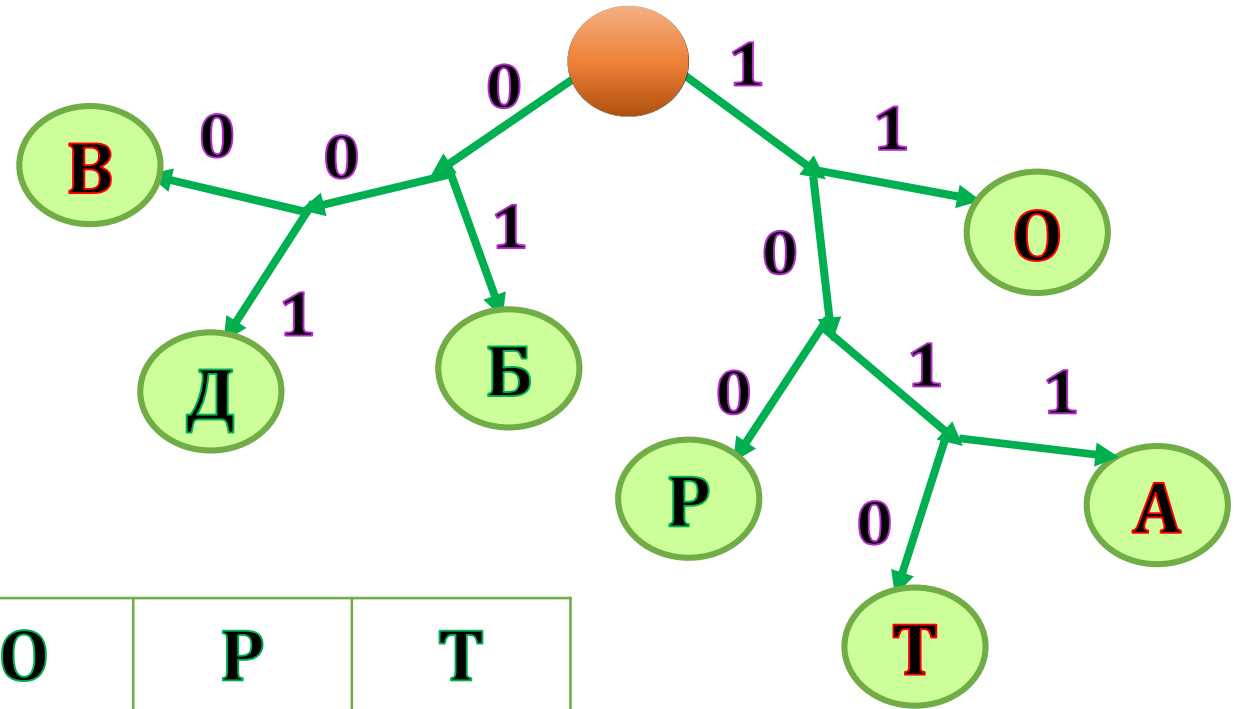


А	Б	И	К	Л	С	Ц
	00		010	111		

А	Б	С	Ц	И	С	С	А
110	00	10	0110	0111	10	10	110

Решение задания №10

10. По каналу связи передаются сообщения, содержащие только семь букв: А, Б, В, Д, О, Р, Т. Для передачи используется двоичный код, удовлетворяющий условию Фано. Кодовые слова для некоторых букв известны: Б — 01, Д — 001, Р — 100. Какое наименьшее количество двоичных знаков потребуется для кодирования слова ВОДОВОРОТ?



А	Б	В	Д	О	Р	Т
1011	01	000	001	11	100	1010

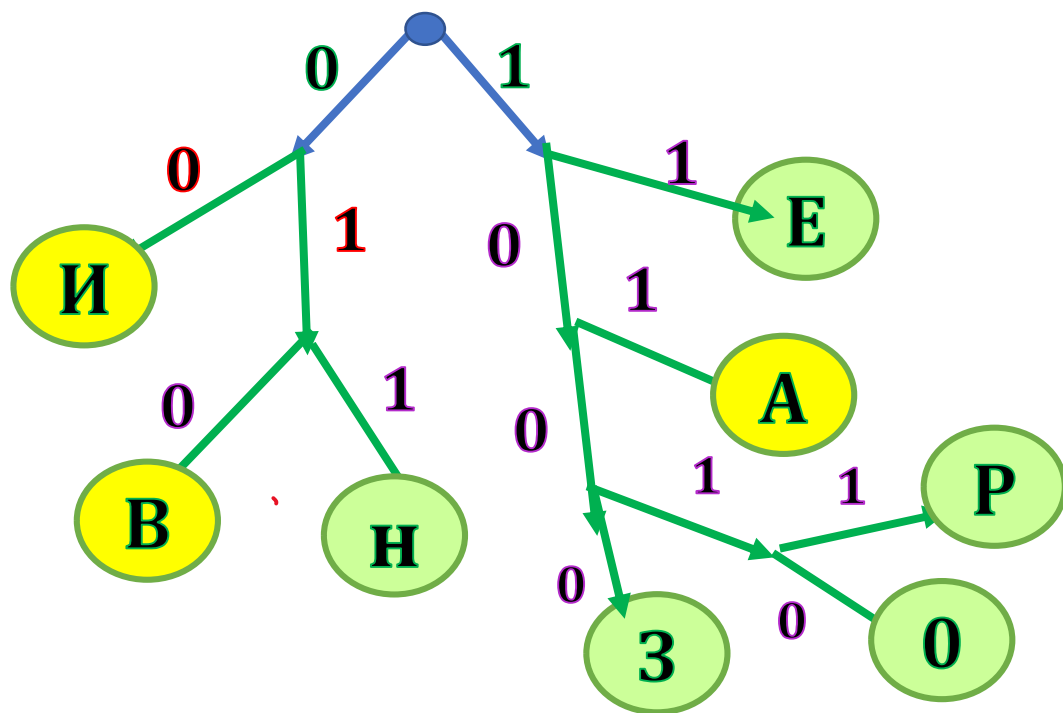
В	О	Д	О	В	О	Р	О	Т
000	11	001	11	000	11	100	11	1010

24

По каналу связи передаются сообщения, содержащие только восемь букв: А, В, Е, З, И, Н, О, Р. Для передачи используется двоичный код, удовлетворяющий условию Фано. Кодовые слова для некоторых букв известны: А — 101, В — 010, И — 00. Какое наименьшее количество двоичных знаков потребуется для кодирования слова НЕВЕЗЕНИЕ?

Примечание. Условие Фано означает, что ни одно кодовое слово не является началом другого кодового слова.

А	В	И	З	Е	Н	О	Р
101	010	00	1000	11	011	10010	10011



НЕВЕЗЕНИЕ

$$I = 3 + 2 + 3 + 2 + 4 + 2 + 3 + 2 + 2 = \underline{23}$$

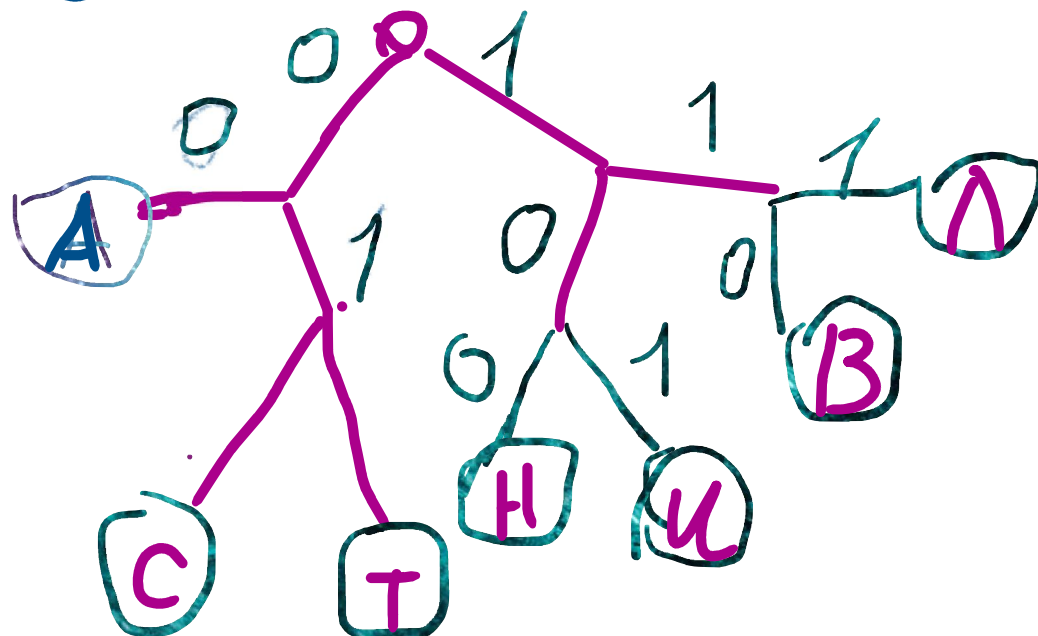
Практическая работа

Закодировать своё имя, подсчитать число бит, которое уйдёт на его кодирование

№	ФИО 11 класс	Ответ
1	Бахтурин Александр	
2	Дедов Артемий	
3	Гончаров Артём	
4	Толстых Дмитрий	

с	т	а	н	и	л	в
2	1	2	1	1	1	1
010	011	00	100	101	111	110
3	3	2	3	3	3	3

Итого: $3 + 3 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3 = \underline{20!}$



Передача информации Выбор кода

2 тип задач

№22. Тип 4 № 83162

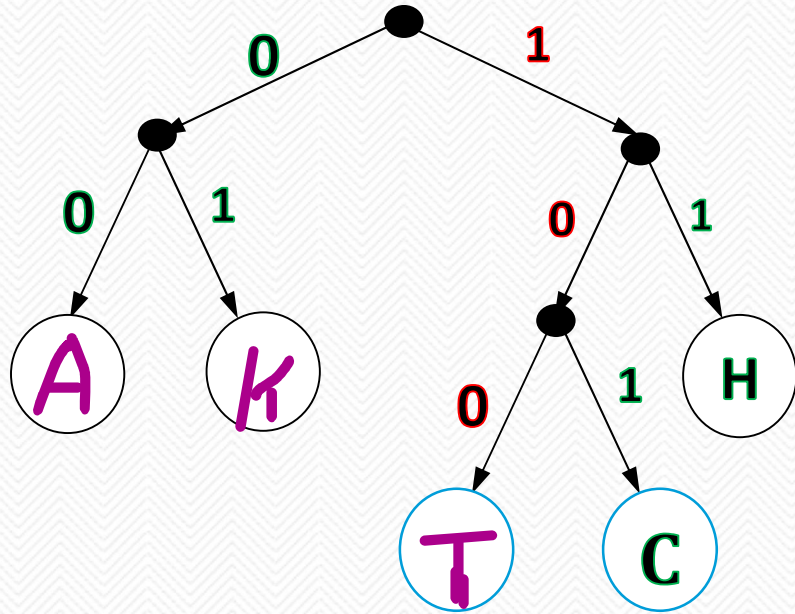
По каналу связи передаются сообщения, содержащие только буквы: **А, Т, К, С, Н**. Для передачи используется двоичный код, удовлетворяющий условию Фано.

Кодовые слова для некоторых букв известны: **Н — 11, С — 101**. Для трёх оставшихся букв **А, Т, К** кодовые слова неизвестны.

Какое количество двоичных знаков потребуется для кодирования слова **КАСАТКА**, если известно, что оно закодировано минимально возможным количеством двоичных знаков?

Примечание. Условие Фано означает, что никакое кодовое слово не является началом другого кодового слова. Это обеспечивает возможность однозначной расшифровки закодированных сообщений.

Решение задачи №22



А	Т	К	С	Н
			101	11

КАСАТКА

К	А	С	Т
2	3	1	1
01	00	101	100

$$2 + 2 + 3 + 2 + 3 + 2 + 2 = \underline{16}$$

Расстояние Хэмминга

(кодировое расстояние) — термин, который означает **меру различия между двумя строками одинаковой длины**. Назван в честь американского математика Ричарда Хэмминга.

Определение

Расстояние Хэмминга — **количество позиций, в которых соответствующие символы двух строк различны**. Символами могут быть буквы, биты или десятичные разряды.

Пример: для двоичных строк 1010 и 1100 расстояние Хэмминга равно **двум**, поскольку различаются второй и третий бит.

Свойства:

Расстояние Хэмминга всегда меньше длины строк, между которыми оно измеряется. Два слова, расстояние Хэмминга между которыми равно 1, называют соседними.

Алгоритм вычисления

Для вычисления расстояния Хэмминга между двумя строками **сравнивается каждый бит в строках**. Различающиеся биты подсчитываются, и этот счёт представляет собой расстояние Хэмминга.

Пример: рассмотрим две строки: «010101» и «110001». Чтобы найти расстояние Хэмминга, сравниваем каждый соответствующий бит:

1. Первый бит в обеих строках различается, поэтому увеличиваем счёт на 1.
2. Второй и третий биты одинаковы в обеих строках.
3. Четвёртый бит различается, поэтому снова увеличиваем счёт.
4. Пятый и шестой биты одинаковы.

В этом примере есть два различающихся бита, что приводит к **расстоянию Хэмминга, равному 2**.

Р-15. По каналу связи с помощью равномерного двоичного кода передаются сообщения, содержащие только 4 буквы: X, Y, Z, W; для кодировки букв используются кодовые слова длины 5. При этом для набора кодовых слов выполнено такое свойство:

- 1. любые два слова из набора отличаются не менее чем в трёх позициях. Это свойство важно для расшифровки сообщений при наличии помех.**
- 2. Для кодирования букв X, Y, Z используются 5-битовые кодовые слова: X: 01111, Y: 00001, Z: 11000. Определите 5-битовое кодовое слово для буквы W, если известно, что оно начинается с 1 и заканчивается 0.**

Найдем расстояния Хэмминга – количество позиций, в которых отличается это кодовое слово от известных кодовых слов букв X, Y и Z:

X: 01111 Y: 00001 Z: 11000

W: 1*0 W: 1***0 W: 1***0**

2+?

2+?

0+?

Проверяем полученное кодовое слово: находим расстояние Хэмминга в парах X-W и Y-W:

X: 01111 Y: 00001 Z: 11000

W: 10110 W: 10110 W: 10110

3

4

3

Ответ: 10110

Домашняя работа

Для кодирования восьми сторон горизонта (север, юг, восток, запад и четыре промежуточные стороны) применили неравномерный двоичный код, удовлетворяющий условию Фано. Для кодирования используют кодовые слова.

**Сборник
Крылова 2026г**

Сторона горизонта	Кодовое слово
Север	00
Юг	10
Восток	110
Запад	111

Какое наименьшее количество двоичных знаков требуется для кодирования четырёх оставшихся промежуточных сторон горизонта? В ответе запишите суммарную длину кодовых слов для кодирования сторон горизонта: юго-восток, юго-запад, северо-восток, северо-запад.

Примечание. Условие Фано означает, что никакое кодовое слово не является началом другого кодового слова. Это обеспечивает возможность однозначной расшифровки закодированных сообщений.

6) (СБОРНИК КРЫЛОВА 2023) По каналу связи передаются сообщения, содержащие только пять букв: А, Б, В, Г, Д. Для передачи используется неравномерный двоичный код. Для букв А, Б, В, Г используются кодовые слова 01, 01, 11 и 000 соответственно.

Укажите самое короткое кодовое слово для буквы Д, при котором код не будет удовлетворять условию Фано, при этом в записи самого слова должно использоваться более одного символа, а само слово не должно совпадать ни с одним из используемых слов для кодирования букв А, Б, В и Г. Если таких слов несколько, то укажите слово с минимальным числовым значением.

Литература

1. vpnunlimited.com