Задание №8
Комбинаторика
Решение формулами

Стрельниковой Л.В.

Формула Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

Теория комбинаторики

Кодирование данных, комбинаторика, системы счисления.

Что проверяется:

Знание о методах измерения количества информации (?)

1.6.1. Формализация понятия алгоритма (?)

1.1.4. Читать и отлаживать программы на языке программирования (?)

Что нужно знать:

- ✓ В русском языке 33 буквы: 10 гласных букв (а, у, о, ы, и, э, я, ю, ё, е), 21 согласная буква (б, в, г, д, ж, з, й, к, л, м, н, п, р, с, т, ф, х, ц, ч, ш, щ) и два знака (ь, ъ).
- ✓ Алфавит английского языка по написанию совпадает с латинским алфавитом и состоит из 26 букв.
- ✓ принципы работы с числами, записанными в позиционных системах счисления
- ✓ если слово состоит из L **букв**, причем есть n_1 вариантов выбора первой буквы, n_2 вариантов выбора второй буквы и т.д., то число возможных слов вычисляется как произведение

  $$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ \dots \ \cdot n_L$$
- ✓ если слово состоит из L букв, причем каждая буква может быть выбрана n способами, то число возможных слов вычисляется как $N = n^L$
- ✓ если в программе L вложенных циклов и внешний цикл выполняется n_1 раз, следующий (вложенный) n_2 раз и т.д., то команды самого внутреннего цикла будут выполняться N раз, где

  $$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ \dots \ \cdot n_L.$$

  Если $n_1 = n_2 = \dots = n_L = n$, то $N = n^L$.
- ✓ при увеличении n или L значение N сильно возрастает, что приводит к существенному увеличению времени выполнения программы.

Комбинаторика – это раздел математики, который занимается подсчетом возможных вариантов расположения, комбинаций или выбора объектов, а также поиском закономерностей или структур, возникающих в результате такого расположения.

Комбинаторика может, к примеру, ответить на такие вопросы:

1. Сколько слов можно составить из определенного набора букв?
2. Сколько подмножеств с определенным количеством элементов можно сформировать из исходного множества?
3. Сколько существует путей из одной точки в другую в графе или сети?
4. Сколькими способами мы можем выбрать 3 людей с определенными качествами из группы в 10 человек, чтобы сформировать команду?
5. Сколькими способами можно раскрасить грани куба в 3 разных цвета?

Факториал числа

- ✓ Одна из главных концепций комбинаторики – **факториал.**
- ✓ Это математическая функция, которая применяется для вычисления произведения всех положительных целых чисел от 1 до заданного числа.
- ✓ Факториал обозначается символом !. Например, факториал числа 5 записывается как **5!** и равен **5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120.**
- ✓ Факториал играет важную роль в комбинаторике, поскольку он используется для вычисления количества перестановок, размещений и сочетаний элементов в наборе.

1. Перестановки с повторениями

$$\underbrace{\underline{\ n\ }\ \ \underline{\ n\ }\ \ \ldots\ \ \underline{\ n\ }\ \ \underline{\ n\ }}_{k} = n^k$$

$$\boxed{N_n^k = n^k}$$

n – **число данных букв**

k - **длина последовательности**

N – **число перестановок**

- ✓ В размещениях каждый элемент может быть на любой позиции и может встретиться любое количество раз.
- ✓ То есть **на каждой из k позиций может быть любой из n символов, тогда всего размещений может быть** $N = n^k$

1. Перестановки с повторениями для разных значений

$$Pn(n1, n2, \ldots, nk) = \frac{n!}{n1! \cdot n2! \cdot \ldots \cdot nk!}$$

где $\mathbf{n = n_1 + n_2 + n_3 \ldots}$

2. Размещение без повторений

Подсчет количества комбинаций, если каждый из элементов будет использоваться ровно 1 раз

- На первой позиции может стоять любой из n символов;
- На второй — любой из оставшихся n – 1 символов;
- На третьей — любой из еще не использовавшихся, то есть n – 2;
- В конце концов — на самой последней позиции может использоваться только 1 оставшийся символ.

Поэтому количество комбинаций перестановок рассчитывается как **факториал количества символов:** произведение всех чисел от 1 до количества.

$$\underline{\;n\;}\ \underline{\;n-1\;}\ \ldots\ \underline{\;2\;}\ \underline{\;1\;} = n!$$

2. Размещение без повторений

$$\underbrace{А \quad Б \quad В \quad Г \quad Д \quad Е}_{n}$$

$n = 6$

$k = 4$

$$\underbrace{\underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3}}_{k}$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)$$

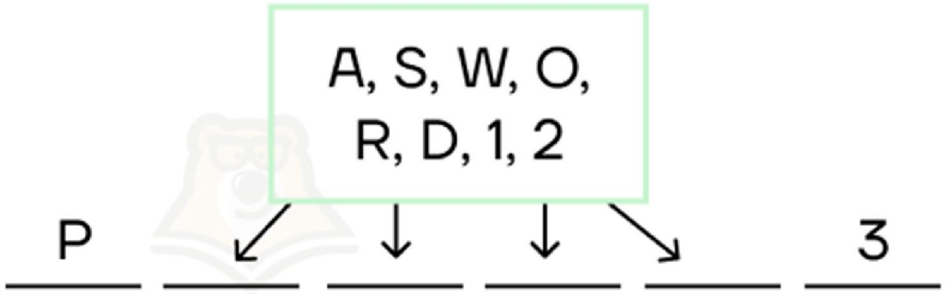
$$A_6^4 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{6!}{(6-4)!}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

В остальных случаях — составляем выражение согласно требованиям:
- ✓ Считаем, какое количество символов может находиться на каждой позиции.
- ✓ Перемножаем полученные значения.

Например, мы выбираем пароль по следующим условиям:
- ✓ длина пароля — 6 символов;
- ✓ используются только символы “P”, “A”, “S”, “W”, “O”, “R”, “D”, “1”, “2”, “3”;
- ✓ “P” должен быть на первом месте и больше не встречаться в пароле;
- ✓ “3” должен быть на последнем месте и больше не встречаться в пароле.

Определим, какие символы на каких позициях могут находиться:



Перемножим количество возможных символов на каждой позиции:

N = 1 * 8 * 8 * 8 * 8 * 1 = 4096.

3. Биномиальный коэффициент или сочетания

Это число, которое показывает количество способов выбрать **k** элементов из **n** элементов без учета порядка, если все элементы различны, и порядок выбора не имеет значения. Биномиальный коэффициент вычисляется по формуле:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\boldsymbol{C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}}$$

n – общее количество элементов,
k – количество элементов, которые мы выбираем.
Например, биномиальный коэффициент **C(5, 2)** показывает, сколько способов можно выбрать 2 предмета из 5, не учитывая порядок их выбора.

3. Сочетания

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}}$$

Решение задач

$$\boxed{N_n^k = n^k} \qquad C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \qquad \boxed{N = n!}$$

Задача 1. Сколько уникальных списков воспроизведения можно сгенерировать из альбома, в котором содержатся 12 треков? Уникальным считается плейлист, в котором каждый трек находится на месте, отличном от исходного альбомного порядка.

Решение: количество таких плейлистов равно числу перестановок без неподвижных точек, то есть **12! = 176214841**.

Задача 2. Сколько существует способов разместить 5 книг на полке, если 2 из них должны стоять рядом?

Решение: для размещения 5 книг на полке в любом порядке существует **5!** возможных способов. Однако если 2 из них должны стоять рядом, то мы можем рассматривать эту пару как один объект. Тогда у нас останется 4 объекта, которые можно разместить в **4!** возможных порядках. Таким образом, общее число способов разместить 5 книг, где 2 из них стоят рядом, равно **2 * 4! = 48**.

Задача 3. Сколько различных башен, состоящих из 8 кубиков, можно построить из 2 красных кубиков, 4 синих кубиков и 2 желтых кубиков?

Решение: Для ответа на этот вопрос, можно использовать формулу для перестановок с повторениями, которая выглядит следующим образом:

$$Pn(n1, n2, \ldots, nk) = \frac{n!}{n1! \cdot n2! \cdot \ldots \cdot nk!}$$

Поскольку у нас есть 3 типа кубиков – 2 красных, 4 синих и 2 желтых, получим:

P(8)! / (2! * 4! * 2!)

Вычисляя факториалы, мы получаем:

(8!) / (2! * 4! * 2!) = 420

Задача №1 - 4

Сколько существует различных символьных последовательностей длины 6 в четырёхбуквенном алфавите {М, А, Р, Т}, которые содержат ровно одну букву Р?

Сколько существует различных символьных последовательностей длины 6 в четырёхбуквенном алфавите {М, А, Р, Т}, которые содержат ровно две буквы Р?

Сколько существует различных символьных последовательностей длины 6 в четырёхбуквенном алфавите {М, А, Р, Т}, которые содержат ровно три буквы Р?

Сколько существует различных символьных последовательностей длины 6 в четырёхбуквенном алфавите {М, А, Р, Т}, которые содержат ровно одну букву Р и одну букву А?

Р 3 3 3 3 3

1. N = 6 * 3⁵ = 1458

Р Р 3 3 3 3

Р Р Р 3 3 3

Решение задач

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

n – длина последовательности

k – данное число букв

Р А 2 2 2 2

Р З З З З З

1. N = 6 * 3^5 = 1458

Р Р З З З З

2. $n_1 = \frac{6*5}{2!} = 15$

N = 15 * 3^4 = 1215

Р Р Р З З З

Решение задач

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}}$$

n – длина последовательности

k – данное число букв

Р А 2 2 2 2

Решение задач

Р З З З З З

1. N = 6 * 3^5 = 1458

Р Р З З З З

2. $\mathbf{n_1 = \frac{6*5}{2!} = 15}$

N = 15 * 3^4 = 1215

Р Р Р З З З

3. $\mathbf{n_1 = \frac{6*5*4}{3!} = 20}$

N = 20 * 3^3 = 540

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}}$$

n – длина последовательности
k – данное число букв

Р А 2 2 2 2

Р- 6 **А - 5**	**4.** $\mathbf{n_1 = 6 * 5 = 30}$ **N = 30 * 2^4 = 480**

Вася составляет 5- буквенные слова из букв **К, А, Т, Е, Р.** Причём буква **Р** используется в каждом слове хотя бы **2 раза**. Каждая из других допустимых букв может встречаться в слове любое количество раз или не встречаться совсем. Считается любая последовательность букв, не обязательно осмысленная. Сколько существует таких слов, которые может составить Вася?

$n_1 = 5 * 4 / 2! = 10$

$N_1 = 10 * 4^3 = 640$

р р 4 4 4

$n_2 = 5 * 4 * 3 / 3! = 10$

$N_2 = 10 * 4^2 = 160$

р р р 4 4

$n_3 = 5 * 4 * 3 * 2 / 4! = 5$

$N_3 = 5 * 4^1 = 20$

р р р р 4

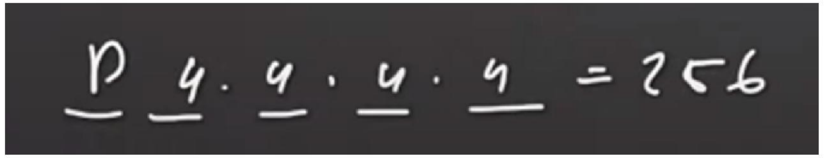
$n_4 = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 / 5! = 1$

$N_4 = 1 * 4^0 = 1$

р р р р р

5 – число буквы Р - 1

4 – число буквы Р – 2



N = N1+N2+N3+N4 = 640+160+20+1= 821

Вася составляет 5- буквенные слова из букв **К, А, Т, Е, Р.** Причём буква **Р** используется в каждом слове хотя бы **2 раза**. Каждая из других допустимых букв может встречаться в слове любое количество раз или не встречаться совсем. Считается любая последовательность букв, не обязательно осмысленная. Сколько существует таких слов, которые может составить Вася?

0 1 2 3 4 5 -

число буквы Р в слове

Подсчитать число всех комбинаций и отнять когда нет буквы Р и когда она одна

$N = 5^5 – 4^5 – 1280 = 821$

5^5 – число всех комбинаций

4^5 – число буквы Р - 0

1280 - число буквы Р - 1

$\underline{P}\ \underline{4}\cdot\underline{4}\cdot\underline{4}\cdot\underline{4} = 256$

$5 * 4^4 = 5 * 2^8 = 5 * 256 = 1280$

Петя составляет 7-буквенные слова из букв А, Б, Р, И, К, О, С. Каждую букву нужно использовать ровно 1 раз, при этом нельзя ставить подряд две гласные или две согласные. Сколько различных кодов может составить Петя?

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} \underline{С} & \underline{Г} & \underline{С} & \underline{Г} & \underline{С} & \underline{Г} & \underline{С} \\ 4\cdot & 3\cdot & 3\cdot & 2\cdot & 2\cdot & 1\cdot & 1 = 144 \end{array}}$$

Вася составляет 6-буквенные коды из букв П, А, Й, Щ, И, К. Каждую букву нужно использова
ровно 1 раз, при этом код не может начинаться с буквы Й и не может содержать сочетания
Сколько различных кодов может составить Вася?

1. 600 слов всего

$$\boxed{5\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=600}$$

2. Находим число сочетаний ИА

И	А	_	_	_	_
_	И	А	_	_	_
_	_	И	А	_	_
_	_	_	И	А	_
_	_	_	_	И	А

И	А	И	3	2	1
3	И	А	3	2	1
3	3	И	А	2	1
3	3	2	И	А	1
3	3	2	1	И	А

И	А	И	3	2	1	= 24
3	И	А	3	2	1	
3	3	И	А	2	1	$18\cdot4=72$
3	3	2	И	А	1	
3	3	2	1	И	А	

1. 72 + 24 = 96

2. 600 – 96 = 504

Шифр кодового замка представляет собой последовательность из пяти символов, каждый из которых является цифрой от 1 до 4. Сколько различных вариантов шифра можно задать, если известно, что цифра 1 встречается ровно два раза, а каждая из других допустимых цифр может встречаться в шифре любое количество раз или не встречаться совсем?

$$\boxed{N = C * (m - 1)^{n-k}}$$

n – общее количество элементов,

k – количество элементов, которые мы выбираем.

m - данное число букв. **C** – число выборов для одного события.

N – число всех комбинаций

$$\boxed{C = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}}$$

Если буква одна

$$\boxed{C = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Если буквы разные

Сколько различных вариантов шифра можно задать?

n – общее количество элементов,

k – количество элементов, которые мы выбираем.

m - данное число букв. **С** – число выборов для одного события.

N – число всех комбинаций

- Количество способов поставить две 1 на пять позиций —

$$C = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$C = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{120}{12} = 10$$

- После того, как определили позиции двух 1, на оставшиеся позиции можем поставить любое из трёх чисел, это можно сделать способами.

- $$N = C * (m - 1)^{n-k}$$

$$N = 10 * (4 - 1)^{5-2} = 10*3^3 = 270$$

- Итого всего кодов.