

A1 (базовый уровень, время – 1 мин)

Тема: Системы счисления и двоичное представление информации в памяти компьютера.

Что нужно знать:

- перевод чисел между десятичной, двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной системами счисления (см. презентацию «Системы счисления»)

Полезно помнить, что в двоичной системе:

- четные числа оканчиваются на 0, нечетные – на 1;
- числа, которые делятся на 4, оканчиваются на 00, и т.д.; числа, которые делятся на 2^k , оканчиваются на k нулей
- если число N принадлежит интервалу $2^{k-1} \leq N < 2^k$, в его двоичной записи будет всего k цифр, например, для числа **125**:

$$2^6 = 64 \leq 125 < 128 = 2^7, \quad 125 = 1111101_2 \text{ (7 цифр)}$$

- числа вида 2^k записываются в двоичной системе как единица и k нулей, например:
 $16 = 2^4 = 10000_2$
- числа вида $2^k - 1$ записываются в двоичной системе k единиц, например:
 $15 = 2^4 - 1 = 1111_2$
- если известна двоичная запись числа N , то двоичную запись числа $2 \cdot N$ можно легко получить, приписав в конец ноль, например:

$$15 = 1111_2, \quad 30 = 11110_2, \quad 60 = 111100_2, \quad 120 = 1111000_2$$

- отрицательные целые числа хранятся в памяти в двоичном дополнительном коде (подробнее см. презентацию «Компьютер изнутри»)
- для перевода отрицательного числа ($-a$) в двоичный дополнительный код нужно сделать следующие операции:
 - перевести число $a-1$ в двоичную систему счисления
 - сделать инверсию битов: заменить все нули на единицы и единицы на нули в пределах разрядной сетки (см. пример далее)

Пример задания:

Даны 4 числа, они записаны с использованием различных систем счисления. Укажите среди этих чисел то, в двоичной записи которого содержится ровно 6 единиц. Если таких чисел несколько, укажите наибольшее из них.

$$1) 63_{10} * 4_{10} \quad 2) F8_{16} + 1_{10} \quad 3) 333_8 \quad 4) 11100111_2$$

Решение:

- 1) нужно перевести все заданные числа в двоичную систему, подсчитать число единиц и выбрать наибольшее из чисел, в которых ровно 6 единиц;
- 2) для первого варианта переведем оба сомножителя в двоичную систему:
 $63_{10} = 111111_2$ $4_{10} = 100_2$
в первом числе ровно 6 единиц, умножение на второе добавляет в конец два нуля:
 $63_{10} * 4_{10} = 111111_2 * 100_2 = 11111100_2$
то есть в этом числе 6 единиц
- 3) для второго варианта воспользуемся связью между шестнадцатеричной и двоичной системами счисления: каждую цифру шестнадцатеричного числа можно переводить отдельно в тетраду (4 двоичных цифры):

$$F_{16} = 1111_2 \quad 8_{16} = 1000_2 \quad F8_{16} = 1111\ 1000_2$$

после добавления единицы $F8_{16} + 1 = 1111\ 1001_2$ также получаем число, содержащее ровно 6 единиц, но оно меньше, чем число в первом варианте ответа

- 4) для третьего варианта используем связь между восьмеричной и двоичной системами: каждую цифру восьмеричного числа переводим отдельно в триаду (группу из трёх) двоичных цифр:

$$333_8 = 011\ 011\ 011_2 = 11011011_2$$

это число тоже содержит 6 единиц, но меньше, чем число в первом варианте ответа

- 5) последнее число 11100111_2 уже записано в двоичной системе, оно тоже содержит ровно 6 единиц, но меньше первого числа
- 6) таким образом, все 4 числа, указанные в вариантах ответов содержат ровно 6 единиц, но наибольшее из них – первое
- 7) Ответ: **1**.

Ещё пример задания:

Сколько единиц в двоичной записи числа 1025?

- 1) 1 2) 2 3) 10 4) 11

Решение (вариант 1, прямой перевод):

- 8) переводим число 1025 в двоичную систему: $1025 = 10000000001_2$
- 9) считаем единицы, их две
- 10) Ответ: **2**

Возможные проблемы:

легко запутаться при переводе больших чисел.

Решение (вариант 2, разложение на сумму степеней двойки):

- 1) тут очень полезно знать наизусть таблицу степеней двойки, где $1024 = 2^{10}$ и $1 = 2^0$
- 2) таким образом, $1025 = 1024 + 1 = 2^{10} + 2^0$
- 3) вспоминая, как переводится число из двоичной системы в десятичную (значение каждой цифры умножается на 2 в степени, равной её разряду), понимаем, что в двоичной записи числа ровно столько единиц, сколько в приведенной сумме различных степеней двойки, то есть, 2
- 4) Ответ: **2**

Возможные проблемы:

нужно помнить таблицу степеней двойки.

Когда удобно использовать:

- когда число чуть больше какой-то степени двойки

Ещё пример задания:

Дано: $a = D7_{16}$ и $b = 331_8$. Какое из чисел c , записанных в двоичной системе счисления, удовлетворяет неравенству $a < c < b$?

- 1) 11011001_2 2) 11011100_2 3) 11010111_2 4) 11011000_2

Общий подход:

перевести все числа (и исходные данные, и ответы) в одну (любую!) систему счисления и сравнить.

Решение (вариант 1, через десятичную систему):

- 5) $a = D7_{16} = 13 \cdot 16 + 7 = 215$
- 6) $b = 331_8 = 3 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8 + 1 = 217$
- 7) переводим в десятичную систему все ответы:
 $11011001_2 = 217$, $11011100_2 = 220$, $11010111_2 = 215$, $11011000_2 = 216$
- 8) очевидно, что между числами 215 и 217 может быть только 216
- 9) таким образом, верный ответ – 4 .

Возможные проблемы:

арифметические ошибки при переводе из других систем в десятичную.

Решение (вариант 2, через двоичную систему):

- 1) $a = D7_{16} = 1101\ 0111_2 = 11010111_2$ (каждая цифра шестнадцатеричной системы *отдельно* переводится в четыре двоичных – *тетраду*);
- 2) $b = 331_8 = 011\ 011\ 001_2 = 11011001_2$ (каждая цифра восьмеричной системы *отдельно* переводится в три двоичных – *триаду*, старшие нули можно не писать);
- 3) теперь нужно сообразить, что между этими числами находится только двоичное число 11011000_2 – это ответ 4.

Возможные проблемы:

запись двоичных чисел однородна, содержит много одинаковых символов – нулей и единиц, поэтому легко запутаться и сделать ошибку.

Решение (вариант 3, через восьмеричную систему):

- 1) $a = D7_{16} = 11010111_2 = 011\ 010\ 111_2 = 327_8$ (сначала перевели в двоичную систему, потом двоичную запись числа разбили на триады **справа налево**, каждую триаду перевели *отдельно* в десятичную систему, так как для чисел от 0 до 7 их восьмеричная запись совпадает с десятичной);
- 2) $b = 331_8$, никуда переводить не нужно;
- 3) переводим в восьмеричную систему все ответы:
 $11011001_2 = 011\ 011\ 001_2 = 331_8$ (разбили на триады **справа налево**, каждую триаду перевели *отдельно* в десятичную систему, как в п. 1)
 $11011100_2 = 334_8$, $11010111_2 = 327_8$, $11011000_2 = 330_8$
- 4) в восьмеричной системе между числами 327_8 и 331_8 может быть только 330_8
- 5) таким образом, верный ответ – 4 .

Возможные проблемы:

нужно помнить двоичную запись чисел от 0 до 7 (или переводить эти числа в двоичную систему при решении).

Решение (вариант 4, через шестнадцатеричную систему):

- 1) $a = D7_{16}$ никуда переводить не нужно;
- 2) $b = 331_8 = 11011001_2 = 1101\ 1001_2 = D9_{16}$ (сначала перевели в двоичную систему, потом двоичную запись числа разбили на тетрады **справа налево**, каждую тетраду перевели в шестнадцатеричную систему; при этом тетрады можно переводить из двоичной системы в десятичную, а затем заменить все числа, большие 9, на буквы – А, В, С, D, E, F);

- 3) переводим в шестнадцатеричную систему все ответы:
 $11011001_2 = 1101\ 1001_2 = D9_{16}$ (разбили на тетрады **справа налево**, каждую тетраду перевели *отдельно* в десятичную систему, все числа, большие 9, заменили на буквы – А, В, С, D, E, F, как в п. 1)
 $11011100_2 = DC_{16}$, $11010111_2 = D7_{16}$, $11011000_2 = D8_{16}$
- 4) в шестнадцатеричной системе между числами $D7_{16}$ и $D9_{16}$ может быть только $D8_{16}$
- 5) таким образом, верный ответ – 4 .

Возможные проблемы:

нужно помнить двоичную запись чисел от 0 до 15 (или переводить эти числа в двоичную систему при решении).

Выводы:

- есть несколько способов решения, «каждый выбирает для себя»;
- наиболее сложные вычисления – при переводе всех чисел в десятичную систему, можно легко ошибиться;
- сравнивать числа в двоичной системе сложно, также легко ошибиться;
- видимо, *в этой задаче* наиболее простой вариант – использовать восьмеричную систему, нужно просто запомнить двоичные записи чисел от 0 до 7 и аккуратно все сделать;
- в других задачах может быть так, что выгоднее переводить все в десятичную или шестнадцатеричную систему счисления.

Еще пример задания:

Для хранения целого числа со знаком используется один байт. Сколько единиц содержит внутреннее представление числа (–78) ?

- 1) 3 2) 4 3) 5 4) 6

Решение (вариант 1, классический):

- 1) переводим число 78 в двоичную систему счисления:
 $78 = 64 + 8 + 4 + 2 = 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^1 = 1001110_2$
- 2) по условию число занимает в памяти 1 байт = 8 бит, поэтому нужно представить число с помощью 8 разрядов
- 3) чтобы получилось всего 8 разрядов (бит), добавляем впереди один ноль:
 $78 = 01001110_2$
- 4) делаем инверсию битов (заменяем везде 0 на 1 и 1 на 0):
 $01001110_2 \rightarrow 10110001_2$
- 5) добавляем к результату единицу
 $10110001_2 + 1 = 10110010_2$
 это и есть число (–78) в двоичном дополнительном коде
- 6) в записи этого числа 4 единицы
- 7) таким образом, верный ответ – 2 .

Возможные ловушки и проблемы:

- нужно не забыть в конце добавить единицу, причем это может быть не так тривиально, если будут переносы в следующий разряд – тут тоже есть шанс ошибиться из-за невнимательности

Решение (вариант 2, неклассический):

- 1) переводим число $78 - 1 = 77$ в двоичную систему счисления:

$$77 = 64 + 8 + 4 + 1 = 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = 1001101_2$$

- 2) по условию число занимает в памяти 1 байт = 8 бит, поэтому нужно представить число с помощью 8 разрядов

- 3) чтобы получилось всего 8 разрядов (бит), добавляем впереди один ноль:

$$77 = 01001101_2$$

- 4) делаем инверсию битов (заменяем везде 0 на 1 и 1 на 0):

$$01001101_2 \rightarrow 10110010_2$$

это и есть число (-78) в двоичном дополнительном коде

- 5) в записи этого числа 4 единицы

- 6) таким образом, верный ответ -2 .

Возможные ловушки и проблемы:

- нужно помнить, что в этом способе в двоичную систему переводится не число a , а число $a-1$; именно этот прием позволяет избежать добавления единицы в конце (легче вычесть в десятичной системе, чем добавить в двоичной)

Решение (вариант 3, неклассический):

- 1) переводим число 78 в двоичную систему счисления:

$$78 = 64 + 8 + 4 + 2 = 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^1 = 1001110_2$$

- 2) по условию число занимает в памяти 1 байт = 8 бит, поэтому нужно представить число с помощью 8 разрядов

- 3) чтобы получилось всего 8 разрядов (бит), добавляем впереди один ноль:

$$78 = 01001110_2$$

- 4) для всех битов, которые стоят **слева от младшей единицы**, делаем инверсию битов (заменяем везде 0 на 1 и 1 на 0):

$$01001110_2 \rightarrow 10110010_2$$

это и есть число (-78) в двоичном дополнительном коде

- 5) в записи этого числа 4 единицы

- 6) таким образом, верный ответ -2 .

Возможные ловушки и проблемы:

- нужно помнить, что при инверсии младшая единица и все нули после нее не меняются